МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 514.75 (08)

Ю. И. Попов, С. Ю. Волкова

НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ *L*-ПОДРАССЛОЕНИЯ СИЛЬНО ВЗАИМНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассматривается специальный класс трехсоставных распределений проективного пространства P_n — $\mathcal{VH}$-распределение. В каждом центре X $\mathcal{VH}$-распределения отношение инцидентности элементов Λ-, M-, H-подрасслоений имеет вид $X \in \Lambda_r \subset M_m \subset H_{n-1}$, где $r < m < n - 1$. Этот класс характеризуется тем, что пары (Λ, Φ), (L, Ψ), (M, E) основных структурных подрасслоений данного трехсоставного распределения взаимны.

Вводятся в рассмотрение инвариантные двойственные нормальные связности, индуцируемые в расслоениях нормалей 1-го и 2-го рода L-подрасслоения данного $\mathcal{VH}$-распределения.

The special class of the threefold distributions of the projective space P_n — $\mathcal{VH}$-distribution — is considered. In each center X of $\mathcal{VH}$-distribution the incidence relation of the elements of the Λ-, M-, H-subbundle has an appearance $X \in \Lambda_r \subset M_m \subset H_{n-1}$, where $r < m < n - 1$. This class is characterized by the fact that the pairs (Λ, Φ), (L, Ψ), (M, E) of the main structural subbundles of this threefold distribution are mutual.

Invariant dual normal connections induced in bundles of the 1st and 2nd kind normals of the L-subbundle of this $\mathcal{VH}$-distribution are examined.

Ключевые слова: распределение, проективная связность, подрасслоение, тензор кручения-кривизны, объект проективной связности, геометрический объект, охват геометрического объекта.

Key words: distribution, projective connection, subbundle, torsion-curvature tensor, projective connection object, geometrical object, geometrical object coverage.

Данная статья является продолжением исследования по теории сильно взаимных распределений, которые названы кратко $\mathcal{VH}$-распределениями [1; 2].

1. Во всей работе использована следующая схема индексов:

$$J, K, L, P, Q = \overline{1, n};\ \bar{J}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0, n};\ p, q, r = \overline{1, r};\ \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r} = (\overline{1, r}; n);$$
$$i, j, k = \overline{r+1, m};\ \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k} = \{\overline{r+1, m}; n\};\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1};\ \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} = \overline{m+1, n};$$
$$a, b, c, d = \overline{1, m};\ A, B, C, D = \{\overline{1, r}; \overline{m+1, n-1}\};\ \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} = \{\overline{1, r}; \overline{m+1, n}\};$$
$$u, v, w = \overline{r+1, n-1};\ s = m - r;\ \delta = 0, 1;\ \varepsilon = \overline{0, 18}.$$

2. Оператор ∇ дифференцирования такой же, как и в работах [1—3].

3. Символом δ обозначим дифференцирование по вторичным параметрам, а значение формы ω_J^K при фиксированных параметрах — через π_J^K. В этом случае оператор обозначается символом ∇_δ.

1. Известно [1—3], что относительно репера $R^1=\{A_{\bar J}\}$ 1-го порядка $\mathcal{VH}$-распределение задается уравнениями

$$\begin{gathered}\omega_p^n=\Lambda_{p\tilde q}^n\omega_0^{\tilde q},\, \omega_i^n=\Lambda_{i\tilde j}^n\omega_0^{\tilde j},\, \omega_\alpha^n=\Lambda_{\alpha\tilde\beta}^n\omega_0^{\tilde\beta},\\ \omega_p^\alpha=\Lambda_{pK}^\alpha\omega_0^K,\, \omega_p^i=\Lambda_{pK}^i\omega_0^K,\, \omega_i^\alpha=\Lambda_{iK}^\alpha\omega_0^K,\\ \omega_\alpha^p=\Lambda_{\alpha K}^p\omega_0^K,\, \omega_\alpha^i=\Lambda_{\alpha K}^i\omega_0^K,\, \omega_i^p=\Lambda_{iK}^p\omega_0^K,\end{gathered}\tag{1}$$

где компоненты фундаментального объекта $\Gamma_2=\{\Gamma_1;\,\Lambda_{\alpha K}^p,\,\Lambda_{\alpha K}^i,\,\Lambda_{iK}^p\}$ второго порядка $\mathcal{VH}$-распределения удовлетворяют уравнениям (здесь мы сразу введем краткие обозначения для квазинормалей 1-го порядка)

$$\begin{gathered}\Lambda_{pn}^n\overset{\text{def}}{=}t_p,\, \Lambda_{in}^n\overset{\text{def}}{=}t_i,\, \Lambda_{\alpha n}^n\overset{\text{def}}{=}t_\alpha,\\ \nabla\Lambda_{pq}^n+\Lambda_{pq}^n\omega_0^0=\Lambda_{pqL}^n\omega_0^L,\, \nabla t_p+t_p\omega_0^0-\Lambda_{pq}^n\omega_n^q-\omega_p^0=t_{pL}\omega_0^L,\\ \nabla\Lambda_{ij}^n+\Lambda_{ij}^n\omega_0^0=\Lambda_{ijL}^n\omega_0^L,\, \nabla t_i+t_i\omega_0^0-\Lambda_{ij}^n\omega_n^j-\omega_i^0=t_{iL}\omega_0^L,\\ \nabla\Lambda_{\alpha\beta}^n+\Lambda_{\alpha\beta}^n\omega_0^0=\Lambda_{\alpha\beta L}^n\omega_0^L,\, \nabla t_\alpha+t_\alpha\omega_0^0-\Lambda_{\alpha\beta}^n\omega_n^\beta-\omega_\alpha^0=t_{\alpha L}\omega_0^L,\\ \nabla\Lambda_{pK}^\alpha+\Lambda_{pK}^\alpha\omega_0^0+\Lambda_{p\tilde q}^n\delta_K^{\tilde q}\omega_n^\alpha-\delta_K^\alpha\omega_p^0=\Lambda_{pKL}^\alpha\omega_0^L,\\ \nabla\Lambda_{pK}^i+\Lambda_{pK}^i\omega_0^0+\Lambda_{p\tilde q}^n\delta_K^{\tilde q}\omega_n^i-\delta_K^i\omega_p^0=\Lambda_{pKL}^i\omega_0^L,\\ \nabla\Lambda_{iK}^\alpha+\Lambda_{iK}^\alpha\omega_0^0+\Lambda_{i\tilde j}^n\delta_K^{\tilde j}\omega_n^\alpha-\delta_K^\alpha\omega_i^0=\Lambda_{iKL}^\alpha\omega_0^L,\\ \nabla\Lambda_{\alpha K}^p+\Lambda_{\alpha K}^p\omega_0^0+\Lambda_{\alpha K}^n\omega_n^p-\delta_K^p\omega_\alpha^0=\Lambda_{\alpha KL}^p\omega_0^L,\\ \nabla\Lambda_{\alpha K}^i+\Lambda_{\alpha K}^i\omega_0^0+\Lambda_{\alpha K}^n\omega_n^i-\delta_K^i\omega_\alpha^0=\Lambda_{\alpha KL}^i\omega_0^L,\\ \nabla\Lambda_{iK}^p+\Lambda_{iK}^p\omega_0^0+\Lambda_{iK}^n\omega_n^p-\delta_K^p\omega_i^0=\Lambda_{iKL}^p\omega_0^L.\end{gathered}\tag{2}$$

Пусть $\mathcal{VH}$-распределение оснащено в смысле Нордена — Картана [1]. Выберем другой точечный проективный репер $\{\mathcal{L}_{\bar J}\}$, адаптированный нормализации $\{\nu_n^i,\,\nu_i^0\}$ L-подрасслоения

$$\mathcal{L}_0\equiv\mathcal{A}_0,\, \mathcal{L}_i=\mathcal{A}_i+\nu_i^0\mathcal{A}_0,\, \mathcal{L}_B=\mathcal{A}_B,\, \mathcal{L}_n=\mathcal{A}_n+\nu_n^i\mathcal{A}_i+L_n^B\mathcal{A}_B,\tag{3}$$

где

$$\nabla\nu_n^i+\omega_n^i=\nu_{nK}^i\omega_0^K,\, \nabla\nu_i^0+\omega_i^0=\nu_{iK}^0\omega_0^K,\, \nabla L_n^A+\omega_n^A=L_{nK}^A\omega_0^K.\tag{4}$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений нового репера имеют вид

$$d\mathcal{L}_{\bar J}=\varphi_{\bar J}^{\bar K}\mathcal{L}_{\bar K}.\tag{5}$$

Дифференцируя (3) с учетом структурных уравнений проективного пространства и соотношений (1), (3) — (5), выразим $\varphi_{\bar{J}}^{\bar{K}}$ через $\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}$:

$$
\begin{gathered}
\varphi_0^0=\omega_0^0-\nu_i^0(\omega_0^i-\nu_n^i\omega_0^n),\ \varphi_j^0=\nu_{jK}^0\omega_0^K+\nu_i^0\nu_n^i\omega_j^n-\nu_i^0\nu_j^0(\omega_0^i-\nu_n^i\omega_0^n),\\
\varphi_0^i=\omega_0^i-\nu_n^i\omega_0^n,\ \varphi_j^i=\omega_j^i-\nu_n^i(\omega_j^n+\nu_j^0\omega_0^n)+\nu_j^0\omega_0^i),\\
\varphi_0^A=\omega_0^A-L_n^A\omega_0^n,\ \varphi_j^A=\omega_j^A-L_n^A(\omega_j^n+\nu_j^0\omega_0^n)+\nu_j^0\omega_0^A),\\
\varphi_0^n=\omega_0^n,\ \varphi_j^n=\omega_j^n+\nu_j^0\omega_0^n,\\
\ldots\\
\varphi_A^0=\omega_A^0-\nu_i^0(\omega_A^i-\nu_n^i\omega_A^n),\\
\varphi_n^0=\omega_n^0+\nu_n^i\omega_i^0+L_n^A\omega_A^0-\nu_i^0(\nu_{nK}^i\omega_0^K+L_n^A\omega_A^i-\nu_n^i\nu_n^j\omega_j^n-\nu_n^iL_n^A\omega_A^n),\\
\varphi_A^i=\omega_A^i-\nu_n^i\omega_A^n,\ \varphi_n^i=\nu_{nK}^i\omega_0^K+L_n^A\omega_A^i-\nu_n^i(\nu_n^j\omega_j^n+L_n^A\omega_A^n),\\
\varphi_A^B=\omega_A^B-L_n^B\omega_A^n,\ \varphi_n^B=L_{nK}^B\omega_0^K+\nu_n^i\omega_i^B-L_n^B(\nu_n^i\omega_j^n+L_n^A\omega_A^n),\\
\varphi_B^n=\omega_B^n,\ \varphi_n^n=\omega_n^n+\nu_n^j\omega_j^n+L_n^A\omega_A^n.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Введем в рассмотрение систему форм $\{\vartheta_{\tilde{A}}^0,\vartheta_{\tilde{A}}^{\tilde{B}}\}$, где

$$
\vartheta_{\tilde{A}}^0=\varphi_{\tilde{A}}^0+\Pi_{\tilde{A}K}^0\varphi_0^K,\ \vartheta_{\tilde{A}}^{\tilde{B}}=\varphi_{\tilde{A}}^{\tilde{B}}+\Pi_{\tilde{A}K}^{\tilde{B}}\varphi_0^K-\delta_{\tilde{A}}^{\tilde{B}}\varphi_0^0. \tag{7}
$$

Формы (7) в силу соотношений (6) представим в виде

$$
\begin{gathered}
\vartheta_A^0=\omega_A^0+\nu_j^0(\nu_n^j\omega_A^n-\omega_A^j)-(\Pi_{Aj}^0\nu_n^j+\Pi_{AB}^0L_n^B)+\Pi_{AK}^0\varphi_0^K,\\
\vartheta_n^0=\omega_n^0-\nu_j^0(\nu_{nK}^j\omega_0^K+L_n^A\omega_A^j-\nu_n^j(\nu_n^i\omega_i^n+L_n^A\omega_A^n))+\nu_n^i\omega_i^0+L_n^A\omega_A^0-\\
-(\Pi_{nj}^0\nu_n^j+\Pi_{nA}^0L_n^A)\omega_0^n+\Pi_{nK}^0\omega_0^K,\\
\vartheta_A^B=\omega_A^B-L_n^B\omega_A^n+\delta_A^B(\omega_0^0-\nu_i^0\omega_0^i+\nu_i^0\nu_n^i\omega_0^n)-(\Pi_{Aj}^B\nu_n^j+\Pi_{AC}^BL_n^C)\omega_0^n+\Pi_{AK}^B\omega_0^K,\\
\vartheta_n^B=L_{nK}^B\omega_0^K+\nu_n^i\omega_i^B-L_n^B(\nu_n^i\omega_i^n+L_n^A\omega_A^n)-(\Pi_{nj}^B\nu_n^j+\Pi_{nC}^BL_n^C)\omega_0^n+\Pi_{nK}^B\omega_0^K,\\
\vartheta_A^n=\omega_A^n-(\Pi_{Aj}^n\nu_n^j+\Pi_{AC}^nL_n^C)\omega_0^n+\Pi_{AK}^n\omega_0^K,\\
\vartheta_n^n=\omega_n^n+\nu_n^p\omega_p^n+L_n^A\omega_A^n-\omega_0^0-\nu_i^0(\omega_0^i-\nu_n^i\omega_i^n)-(\Pi_{nj}^n\nu_n^j+\Pi_{nA}^nL_n^A)\omega_0^n+\Pi_{nK}^n\omega_0^K.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Система форм $\{\vartheta_{\tilde{A}}^0,\vartheta_{\tilde{A}}^{\tilde{B}}\}$ (8) определяет нормальную центропроективную связность 1-го рода $\vartheta^{\perp}$ [3; 4] (центропроективную линейную связность $\vartheta^{\perp}$) в расслоении нормалей 1-го рода L-подрасслоения данного $\mathcal{VH}$-распределения, если она удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [5]:

$$
D\vartheta_{\tilde{A}}^0=\vartheta_{\tilde{A}}^{\tilde{C}}\wedge\vartheta_{\tilde{C}}^0+\Re_{\tilde{A}PQ}^0\omega_0^P\wedge\omega_0^Q,\ D\vartheta_{\tilde{A}}^{\tilde{B}}=\vartheta_{\tilde{A}}^{\tilde{C}}\wedge\vartheta_{\tilde{C}}^{\tilde{B}}+\Re_{\tilde{A}PQ}^{\tilde{B}}\omega_0^P\wedge\omega_0^Q. \tag{9}
$$

Для того чтобы система форм (8) удовлетворяла структурным уравнениям Картана — Лаптева (9), необходимо и достаточно, чтобы охваты компонент объекта связности $\{\Pi_{\tilde{A}K}^0,\Pi_{\tilde{A}K}^{\tilde{B}}\}$ имели такое строение:

$$\Pi^0_{Ai} = \Pi^B_{Ai} = \Pi^B_{ni} = \Pi^B_{nn} = \Pi^n_{Ai} = 0,\, \Pi^0_{An} = \Pi^0_{nA} = y^0_n L^0_A,\, \Pi^0_{nn} = (y^0_n)^2,$$
$$\Pi^n_{nn} = 2y^0_n,\, \Pi^B_{An} = \Pi^B_{nA} = \delta^B_A y^0_n,\, \Pi^B_{AC} = \delta^B_A L^0_C + \delta^B_C L^0_A, \tag{10}$$
$$\Pi^n_{nA} = \Pi^n_{An} = L^0_A,\, \Pi^0_{AC} = L^0_A L^0_C + \Pi^n_{AC} y^0_n,\, \Pi^0_{ni} = \Pi^n_{ni} y^0_n,$$

где

$$y^0_n = \varphi^0_n + L^A_n L^0_n,\, \varphi^0_n = -\frac{1}{s}(\nu^i_{ni} - \Lambda^n_{ij}\nu^i_n\nu^j_n),\, \nabla_\delta\varphi^0_n - L^0_A\Pi^A_n + \nu^i_n\Pi^0_i + \Pi^0_n \equiv 0,$$
$$L^0_p = -\frac{1}{s}\Lambda^i_{pi},\, L^0_\alpha = -\frac{1}{s}\Lambda^i_{\alpha i},\, \nabla L^0_A + \omega^0_A = L^0_{AK}\omega^K_0,\, \nabla L^A_n + \omega^A_n = L^A_{nK}\omega^K_0.$$

В формулах (10) в качестве тензоров Π^n_{ni}, Π^n_{AB} можно взять любой из следующих охватов:

$$\overset{0}{\Pi}{}^n_{AB} = 0,\, \overset{1}{\Pi}{}^n_{AB} = \Lambda^n_{AB}, \tag{11}$$

$$\overset{0}{\Pi}{}^n_{ni} = 0,\, \overset{1}{\Pi}{}^n_{ni} = t_i + \nu^0_i + \Lambda^n_{ij}\nu^j_n,$$
$$\overset{2}{\Pi}{}^n_{ni} = b_i - \nu^0_i + b^n_{ij}\nu^j_n,\, \overset{3}{\Pi}{}^n_{ni} = l_i - \nu^0_i + b^n_{ij}\nu^j_n,\, \overset{4}{\Pi}{}^n_{ni} = \varepsilon_i - \nu^0_i + b^n_{ij}\nu^j_n,$$
$$\overset{5}{\Pi}{}^n_{ni} = \frac{1}{2}(t_i + L_i) + b^n_{ij}\nu^j_n,\, \overset{6}{\Pi}{}^n_{ni} = \frac{1}{2}(t_i + \Lambda_i) + b^n_{ij}\nu^j_n,$$
$$\overset{7}{\Pi}{}^n_{ni} = \frac{1}{2}(t_i + E_i) + b^n_{ij}\nu^j_n,\, \overset{8}{\Pi}{}^n_{ni} = \frac{1}{2}(t_i + b_i) + b^n_{ij}\nu^j_n,$$
$$\overset{9}{\Pi}{}^n_{ni} = \frac{1}{2}(t_i + l_i) + b^n_{ij}\nu^j_n,\, \overset{10}{\Pi}{}^n_{ni} = \frac{1}{2}(t_i + \varepsilon_i) + b^n_{ij}\nu^j_n, \tag{12}$$
$$\overset{11}{\Pi}{}^n_{ni} = L_i - \nu^0_i + \Lambda^n_{ji}\nu^j_n,\, \overset{12}{\Pi}{}^n_{ni} = \Lambda_i - \nu^0_i + \Lambda^n_{ji}\nu^j_n,$$
$$\overset{13}{\Pi}{}^n_{ni} = E_i - \nu^0_i + \Lambda^n_{ji}\nu^j_n,$$
$$\overset{14}{\Pi}{}^n_{ni} = D_i + 3L_i - 4\nu^0_i + 2b^n_{ij}\nu^j_n,\, \overset{15}{\Pi}{}^n_{ni} = D_i + 3\Lambda_i - 4\nu^0_i + 2b^n_{ij}\nu^j_n,$$
$$\overset{16}{\Pi}{}^n_{ni} = D_i + 3E_i - 4\nu^0_i + 2b^n_{ij}\nu^j_n,\, \overset{17}{\Pi}{}^n_{ni} = D_i - \nu^0_i + \Lambda^n_{ji}\nu^j_n,\, \overset{18}{\Pi}{}^n_{ni} = b^n_{ij}T^j_n,$$

где квазинормалями L-подрасслоения [1—3] являются

$$\Lambda_i = \frac{1}{r}\Lambda^{pq}_n\Lambda^n_{pqi},\, L_i = \frac{1}{s+2}\Lambda^{jk}_n\Lambda^n_{kji},\, E_i = \frac{1}{n-m-1}\Lambda^{\beta\alpha}_n\Lambda^n_{\alpha\beta i}, \tag{13}$$

$$l_i = \frac{1}{r}b^{qp}_n b^n_{pqi},\, b_i = \frac{1}{s+2}b^{jk}_n b^n_{kji},\, \varepsilon_i = \frac{1}{n-m-1}b^{\beta\alpha}_n b^n_{\alpha\beta i}. \tag{14}$$

Структурные формы (8) при охватах (10)—(12) обозначим соответственно $\overset{\delta\varepsilon}{\vartheta}{}^0_{\tilde{A}}$ и $\overset{\delta\varepsilon}{\vartheta}{}^{\tilde{B}}_{\tilde{A}}$. Рассматривая попарные комбинации охватов (11)—(12), получим тридцать восемь нормальных связностей $\overset{0\varepsilon}{\vartheta}{}^\perp$ и $\overset{1\varepsilon}{\vartheta}{}^\perp$ $(\varepsilon = \overline{0,18},\, \delta = \overline{1,2})$.

2. Следуя работам [3; 4], представим формы $\{\overset{00}{\vartheta}{}^0_{\tilde{A}}, \overset{00}{\vartheta}{}^{\tilde{B}}_{\tilde{A}}\}$, определяющие связность $\overset{00}{\vartheta}{}^{\perp}$, в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\overset{00}{\vartheta}{}^0_A = \omega^0_A + \nu^0_j(\nu^j_n\omega^n_A - \omega^j_A) + L^0_A L^0_B\omega^B_0 + L^0_A(y^0_n - L^0_C L^C_n)\omega^n_0,\\
&\overset{00}{\vartheta}{}^0_n = \omega^0_n + \nu^j_n\omega^0_j + L^A_n\omega^0_A - \nu^0_j[\nu^j_{nK}\omega^K_0 + L^C_n\omega^j_C - \nu^j_n(\nu^i_n\omega^n_i + L^A_n\omega^n_A)] +\\
&\qquad + y^0_n(y^0_n - L^0_C L^C_n)\omega^n_0 + y^0_n L^0_C\omega^C_0,\\
&\overset{00}{\vartheta}{}^B_A = \omega^B_A + L^0_A\omega^B_0 - L^B_n(\omega^n_A + L^0_A\omega^n_0) - \delta^B_A[\omega^0_0 - L^0_C\omega^C_n - \nu^0_i\omega^i_0 -\\
&\qquad - (y^0_n - \nu^0_j\nu^j_n - L^0_C L^C_n)\omega^n_0],\\
&\overset{00}{\vartheta}{}^B_n = L^B_{nK}\omega^K_0 + \nu^j_n\omega^B_j - L^B_n(\nu^i_n\omega^n_i + L^C_n\omega^n_C) + y^0_n(\omega^B_0 - L^B_n\omega^n_0),\\
&\overset{00}{\vartheta}{}^n_A = \omega^n_A + L^0_A\omega^n_0,\\
&\overset{00}{\vartheta}{}^n_n = \omega^n_n - \omega^0_0 + L^0_C\omega^C_0 + \nu^0_i\omega^i_0 + \nu^i_n\omega^n_i + L^C_n\omega^n_C +\\
&\qquad + (2y^0_n - L^0_C L^C_n - \nu^0_i\nu^i_n)\omega^n_0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Далее, используя соотношения (10) — (12), (15), найдем зависимости между формами $\overset{\delta\varepsilon}{\vartheta}{}^0_{\tilde{A}}$, $\overset{\delta\varepsilon}{\vartheta}{}^{\tilde{B}}_{\tilde{A}}$ и формами (15):

$$\begin{aligned}
&\overset{\delta\varepsilon}{\vartheta}{}^0_A = \overset{00}{\vartheta}{}^0_A + \overset{\delta}{\Pi}{}^n_{AB} y^0_n(\omega^B_0 - \mathrm{L}^B_n\,\omega^n_0),\\
&\overset{\delta\varepsilon}{\vartheta}{}^0_n = \overset{00}{\vartheta}{}^0_n + \overset{\varepsilon}{\Pi}{}^n_{nj} y^0_n(\omega^j_0 - \nu^j_n\omega^n_0),\\
&\overset{\delta\varepsilon}{\vartheta}{}^B_A = \overset{00}{\vartheta}{}^B_A,\\
&\overset{\delta\varepsilon}{\vartheta}{}^B_n = \overset{00}{\vartheta}{}^B_n,\\
&\overset{\delta\varepsilon}{\vartheta}{}^n_A = \overset{00}{\vartheta}{}^n_A + \overset{\delta}{\Pi}{}^n_{AB}(\omega^B_0 - \Lambda^B_n\omega^n_0),\\
&\overset{\delta\varepsilon}{\vartheta}{}^n_n = \overset{00}{\vartheta}{}^n_n + \overset{\varepsilon}{\Pi}{}^n_{nj}(\omega^j_0 - \nu^j_n\omega^n_0).
\end{aligned} \tag{16}$$

В результате справедлива

Теорема 1. *На оснащенном в смысле Нордена — Картана L-подрасслоении данного $\mathcal{VH}$-распределения в расслоении его нормалей 1-го рода индуцируются тридцать восемь нормальных связностей, определяемых системой слоевых форм* (15), (16), *связанных зависимостями* (16).

3. Пусть L-подрасслоение $\mathcal{VH}$-распределения оснащено в смысле Нордена — Картана. Выясним условия, при которых некоторые из связностей $\overset{\delta\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$ совпадают или вырождаются в одну связность.

Имеет место

Теорема 2. *Каждая пара нормальных связностей* $(\overset{\delta5}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta0}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta6}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta0}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta7}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta0}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta8}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta0}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta9}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta0}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta10}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta0}{\nabla}{}^{\perp})$, *индуцируемых на оснащенном в смысле Нордена — Картана L-подрасслоении $\mathcal{VH}$-распределения, совпадает* *тогда и только тогда, когда поле нормалей 1-го рода N_{n-s} L-подрасслоения (при этом выбор поля нормалей 2-го рода произволен) определяется соответственно полем квазитензора* $\{\mathfrak{B}_n^i\}$, $\{\mathscr{L}_n^i\}$, $\{\mathscr{E}_n^i\}$, $\{b_n^i\}$, $\{l_n^i\}$, $\{\varepsilon_n^i\}$.

Доказательство. Действительно, последовательно получаем

$$\overset{\delta 5}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \overset{\delta 5}{\Pi}{}^{n}_{ni} \equiv \overset{\delta 0}{\Pi}{}^{n}_{ni} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(t_i + L_i) + b_{ij}^n \nu_n^j = 0 \Leftrightarrow \nu_n^i = -\frac{1}{2} b_n^{ij}(t_j + L_j) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{B}_n^i, \quad (17)$$

$$\overset{\delta 6}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(t_i + \Lambda_i) + b_{ij}^n \nu_n^j = 0 \Leftrightarrow \nu_n^i = -\frac{1}{2} b_n^{ij}(t_j + \Lambda_j) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{L}_n^i, \quad (18)$$

$$\overset{\delta 7}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(t_i + E_i) + b_{ij}^n \nu_n^j = 0 \Leftrightarrow \nu_n^i = -\frac{1}{2} b_n^{ij}(t_j + E_j) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{E}_n^i, \quad (19)$$

$$\overset{\delta 8}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(t_i + b_i) + b_{ij}^n \nu_n^j = 0 \Leftrightarrow \nu_n^i = -\frac{1}{2} b_n^{ij}(t_j + b_j) \overset{\text{def}}{=} b_n^i, \quad (20)$$

$$\overset{\delta 9}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(t_i + l_i) + b_{ij}^n \nu_n^j = 0 \Leftrightarrow \nu_n^i = -\frac{1}{2} b_n^{ij}(t_j + l_j) \overset{\text{def}}{=} l_n^i, \quad (21)$$

$$\overset{\delta 10}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(t_i + \varepsilon_i) + b_{ij}^n \nu_n^j = 0 \Leftrightarrow \nu_n^i = -\frac{1}{2} b_n^{ij}(t_j + \varepsilon_j) \overset{\text{def}}{=} \varepsilon_n^i. \ \square \quad (22)$$

Теорема 3. *Индуцируемые на оснащенном в смысле Нордена — Картана L-подрасслоении $\mathscr{VH}$-распределения каждая пара нормальных связностей* $(\overset{\delta 2}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta 3}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta 4}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp})$ *совпадает тогда и только тогда , когда соответственно равны нулю тензоры:*

$$T_i^0 \overset{\text{def}}{=} b_i + b_{ij}^n \nu_n^j - \nu_i^0 = 0, \quad (23)$$

$$\mathscr{T}_i^0 \overset{\text{def}}{=} l_i + b_{ij}^n \nu_n^j - \nu_i^0 = 0, \quad (24)$$

$$\mathfrak{T}_i^0 \overset{\text{def}}{=} \varepsilon_i + b_{ij}^n \nu_n^j - \nu_i^0 = 0. \quad (25)$$

Определение. Если для нормализации (ν_n^i, ν_i^0) в смысле Нордена L-подрасслоения данного $\mathscr{VH}$-распределения выполняется условие $T_i^0 = 0$ (23), или $\mathscr{T}_i^0 = 0$ (24), или $\mathfrak{T}_i^0 = 0$ (25), то будем говорить, что *нормали* $\{\nu_n^i\}$ и $\{\nu_i^0\}$ *взаимны* [4] или *нормализация* (ν_n^i, ν_i^0) *взаимна соответственно относительно квазинормали* $\{b_i\}$, $\{l_i\}$, $\{\varepsilon_i\}$ (14).

4. Нормаль 2-го рода, взаимная с нормалью $\mathfrak{B}_n^i$ (17), задается (определяется) в силу (23), (17) квазитензором

$$\nu_i^0 = b_i + b_{ik}^n \mathfrak{B}_n^k = b_i - \frac{1}{2}(t_i + L_i) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{B}_i^0. \quad (26)$$

Следовательно, нормализация $(\mathfrak{B}_n^i, \mathfrak{B}_i^0)$ L-подрасслоения взаимно относительно квазинормали $\{b_i\}$ (14) $(T_i^0 \equiv 0)$.

Известно [3; 4], что нормализация Фубини (Φ_n^i, Φ_i^0), где

$$\Phi_n^i = \frac{1}{2} b_n^{ij}(D_j + 3L_j - 4b_j), \Phi_i^0 = \frac{1}{2} b_n^{ij}(D_i + 3L_i - 2b_i), \tag{27}$$

также взаимна относительно квазинормали $\{b_i\}$.

В случае голономного L-подрасслоения или L-подрасслоения с полем симметрического тензора $\Lambda_{ij}^n \stackrel{\text{def}}{=} b_{ij}^n$ $(\Lambda_{[ij]}^n = 0)$ также взаимны относительно квазинормали $\{b_i\}$ нормализации Вильчинского (W_n^i, W_i^0) [3; 4] и Михэйлеску $(\mathscr{M}_n^i, \mathscr{M}_i^0)$, где

$$\mathscr{M}_n^i = -\frac{1}{2} b_n^{ij}(b_j + t_j), \mathscr{M}_i^0 = \frac{1}{2}(b_j - t_j). \tag{28}$$

Кроме того, согласно (12)—(14), (17), (20), (26) имеем

$$L_i \equiv b_i, \mathfrak{B}_i^0 = \mathscr{M}_i^0, \mathscr{B}_n^i = \mathscr{M}_n^i.$$

Резюмируя, приходим к выводу.

Теорема 4. *При нормализациях* $(\mathfrak{B}_n^i, \mathfrak{B}_i^0)$ *(17), (26),* (Φ_n^i, Φ_i^0) *(27) L-подрасслоения* $\mathscr{VH}$ *-распределения нормальные связности* $\overset{\delta 2}{\nabla}{}^{\perp}$ *и* $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}$ *совпадают. В случае голономного L-подрасслоения или L-подрасслоения с полем симметрического тензора* Λ_{ij}^n $(\Lambda_{[ij]}^n = 0)$

а) нормализация Вильчинского (W_n^i, W_i^0) *L-подрасслоения порождает совпадающие нормальные связности* $\overset{\delta 2}{\nabla}{}^{\perp}$ *и* $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}$;

б) четверка нормальных связностей $(\overset{\delta 2}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 5}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 8}{\nabla}{}^{\perp})$ *вырождается в одну связность и при этом L-подрасслоение нормализовано полями нормалей Михэйлеску* $(\mathscr{M}_n^i, \mathscr{M}_i^0)$ (28).

Непосредственным вычислением убеждаемся, что нормализации L-подрасслоения

а) Фубини $(\mathscr{F}_n^i, \mathscr{F}_i^0)$ (второй аналог), где

$$\mathscr{F}_n^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} b_n^{ij}(D_j + 3\Lambda_j - 4l_j), \mathscr{F}_i^0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(D_i + 3\Lambda_i - 2l_i); \tag{29}$$

b) Михэйлеску (m_n^i, m_i^0) (второй аналог), где

$$m_n^i \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} b_n^{ij}(l_j + t_j), m_i^0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(l_i - t_i); \tag{30}$$

c) нормализация $(\mathscr{L}_n^i, \mathscr{L}_i^0)$, где

$$\mathscr{L}_n^i \overset{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{2} b_n^{ij}(\Lambda_j + t_j), \mathscr{L}_i^0 \overset{\mathrm{def}}{=} l_i - \frac{1}{2}(t_i + \Lambda_i) \qquad (31)$$

взаимны относительно квазинормали $\{l_i\}$ (14), т. е. тензор $\mathscr{T}_i^0 \equiv 0$ (24).

Кроме того, на L-подрасслоении с полем симметрического тензора Λ_{ab}^n $(\Lambda_{[ab]}^n = 0)$ имеем

$$\Lambda_i = l_i, \mathscr{L}_i^0 = m_i^0, \mathscr{L}_n^i = m_n^i.$$

В результате справедлива

Теорема 5. *Нормализации* $(\mathscr{L}_n^i, \mathscr{L}_i^0)$ *(31),* $(\mathscr{F}_n^i, \mathscr{F}_i^0)$ *(29) порождают (индуцируют) на L-подрасслоении* $\mathscr{VH}$ *-распределения совпадающие нормальные связности* $\overset{\delta 3}{\nabla}{}^{\perp}$ *и* $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}$.

На L-подрасслоении с полем симметрического тензора Λ_{ab}^n $(\Lambda_{[ab]}^n = 0)$ *четверка нормальных связностей* $(\overset{\delta 4}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 7}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 10}{\nabla}{}^{\perp})$ *вырождается в одну связность тогда и только тогда, когда L-подрасслоение оснащено полями (вторых аналогов) нормалей Михэйлеску* (m_n^i, m_i^0) (30).

Введем в рассмотрение квазитензоры L-подрасслоения

$$\mathscr{E}_n^i \overset{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{2} b_n^{ij}(E_j + t_j), \mathscr{E}_i^0 \overset{\mathrm{def}}{=} \varepsilon_i - \frac{1}{2}(t_i + E_i), \qquad (32)$$

$$\mathfrak{F}_n^i \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2} b_n^{ij}(D_j + 3E_j - 4\varepsilon_j), \mathfrak{F}_i^0 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}(D_i + 3E_i - 2\varepsilon_i). \qquad (33)$$

Поля этих квазитензоров на L-подрасслоении $\mathscr{VH}$-распределения порождают поля взаимных нормализаций $(\mathscr{E}_n^i, \mathscr{E}_i^0)$, $(\mathfrak{F}_n^i, \mathfrak{F}_i^0)$ относительно поля квазинормали $\{\varepsilon_i\}$, так как тензор $\mathfrak{T}_i^0 \equiv 0$ (25).

С учетом этого замечания имеет место (доказательство аналогично теоремам 4 и 5)

Теорема 6. *Нормализации* $(\mathscr{E}_n^i, \mathscr{E}_i^0)$, $(\mathfrak{F}_n^i, \mathfrak{F}_i^0)$ *индуцируют на L-подрасслоении* $\mathscr{VH}$ *-распределения совпадающие нормальные связности* $\overset{\delta 4}{\nabla}{}^{\perp}$ *и* $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}$.

На L-подрасслоении с полем симметрического тензора Λ_{uv}^n $(\Lambda_{[uv]}^n = 0)$ *четверка нормальных связностей* $(\overset{\delta 4}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 7}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 10}{\nabla}{}^{\perp})$ *вырождается в одну связность тогда и только тогда, когда L-подрасслоение нормализовано полями нормалей Михэйлеску (третий аналог)*

$$\mathfrak{M}_n^i \overset{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{2} b_n^{ij}(\varepsilon_j + t_j), \mathfrak{M}_i^0 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}(\varepsilon_i - t_i). \qquad (34)$$

Из теорем 4—6 непосредственно получаем

Следствие. *Индуцируемые на оснащенном в смысле Нордена — Картана L-подрасслоении* $\mathscr{VH}$ *-распределения каждая тройка нормальных связностей*

$(\overset{\delta 5}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 2}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta 6}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 3}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta 7}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 4}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp})$ *вырождается в одну связность тогда и только тогда, когда нормализациями L-подрасслоения являются соответственно* $(\mathfrak{B}_n^i, \mathfrak{B}_i^0)$, $(\mathscr{L}_n^i, \mathscr{L}_i^0)$, $(\mathscr{E}_n^i, \mathscr{E}_i^0)$ *или когда полем нормалей 1-го рода* N_{n-s} *L-подрасслоения является соответственно поле квазитензора* $\{\mathfrak{B}_n^i\}$, $\{\mathscr{L}_n^i\}$, $\{\mathscr{E}_n^i\}$ *и нормализация взаимна относительно соответственно квазинормали* $\{b_i\}$, $\{l_i\}$, $\{\varepsilon_i\}$.

5. Найдем условия совпадения тройки нормальных связностей $(\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 2}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 14}{\nabla}{}^{\perp})$:

$$\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{\delta 2}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{\delta 14}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} b_i - \nu_i^0 + b_{ij}^n \nu_n^j = 0, \\ D_i + 3L_i - 4\nu_i^0 + 2b_{ij}^n \nu_n^j = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \nu_n^j = \dfrac{1}{2} b_n^{ij}(D_j + 3L_j - 4b_j) \overset{\text{def}}{=} \Phi_n^i, \\ \nu_i^0 = \dfrac{1}{2}(D_i + 3L_i - 2b_i) \overset{\text{def}}{=} \Phi_i^0. \end{cases}$$

Аналогично получаем:

$$\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{\delta 3}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{\delta 15}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} l_i - \nu_i^0 + b_{ij}^n \nu_n^j = 0, \\ D_i + 3\Lambda_i - 4\nu_i^0 + 2b_{ij}^n \nu_n^j = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \nu_n^i = \dfrac{1}{2} b_n^{ij}(D_j + 3\Lambda_j - 4l_j) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{F}_n^i, \\ \nu_i^0 = \dfrac{1}{2}(D_i + 3\Lambda_i - 2l_i) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{F}_i^0, \end{cases}$$

$$\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{\delta 4}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{\delta 16}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_i - \nu_i^0 + b_{ij}^n \nu_n^j = 0, \\ D_i + 3E_i - 4\nu_i^0 + 2b_{ij}^n \nu_n^j = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \nu_n^i = \dfrac{1}{2} b_n^{ij}(D_j + 3E_j - \varphi_j) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{F}_n^i, \\ \nu_i^0 = \dfrac{1}{2}(D_i + 3E_i - 2\varepsilon_i) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{F}_i^0. \end{cases}$$

Следовательно, имеет место

Теорема 7. *Каждая тройка нормальных связностей* $(\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 2}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 14}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 3}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 15}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 4}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 16}{\nabla}{}^{\perp})$, *индуцируемая на оснащенном в смысле Нордена – Картана L-подрасслоении* $\mathscr{VH}$ *-распределения, вырождается в одну связность тогда и только тогда, когда L-подрасслоение нормализовано соответственно полями нормалей Фубини* (Φ_n^i, Φ_i^0), $(\mathscr{F}_n^i, \mathscr{F}_i^0)$, $(\mathfrak{F}_n^i, \mathfrak{F}_i^0)$ *(первые аналоги нормалей Фубини 1-го, 2-го и 3-го типа).*

Из соотношений (12) находим следующие зависимости среди тензоров $\overset{\varepsilon}{\Pi}{}^n_{ni}$:

$$\overset{1}{\Pi}{}^n_{ni}+\overset{11}{\Pi}{}^n_{ni}=2\overset{5}{\Pi}{}^n_{ni},\ \overset{1}{\Pi}{}^n_{ni}+\overset{12}{\Pi}{}^n_{ni}=2\overset{6}{\Pi}{}^n_{ni},\ \overset{1}{\Pi}{}^n_{ni}+\overset{13}{\Pi}{}^n_{ni}=2\overset{7}{\Pi}{}^n_{ni}. \tag{35}$$

В силу равенств (35) приходим к выводу

Теорема 8. *Индуцируемые на оснащенном в смысле Нордена – Картана L-подрасслоении $\mathcal{VH}$-распределения каждая из троек нормальных связностей* $(\overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 11}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 5}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 12}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 6}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 13}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 7}{\nabla}{}^{\perp})$ *вырождается в одну тогда и только тогда, когда в каждой тройке любые две нормальные связности совпадают.*

Доказательство. Действительно, если в любом из равенств (35) какие-нибудь два тензора $\overset{\varepsilon}{\Pi}{}^n_{ni}$ совпадают, то и все три тензора из этой тройки совпадают. □

6. Предполагая, что $\Lambda^n_{[ij]}=0,$ найдем условия совпадения любой пары из тройки нормальных связностей $(\overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 5}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 11}{\nabla}{}^{\perp})$ со связностью $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}$.

Из соотношений (12), (20), (28) последовательно находим:

$$\text{a)}\ \overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 5}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow\begin{cases}t_i+\nu^0_i+b^n_{ij}\nu^j_n=0,\\ \dfrac{1}{2}(t_i+b_i)+b^n_{ij}\nu^j_n=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nu^0_i=\dfrac{1}{2}(b_i-t_i)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{M}^0_i,\\ \nu^i_n=-\dfrac{1}{2}b^{ij}_n(t_j+b_j)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{M}^i_n;\end{cases}$$

$$\text{b)}\ \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 5}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 11}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow\begin{cases}b_i-\nu^0_i+b^n_{ij}\nu^j_n=0,\\ \dfrac{1}{2}(t_i+b_i)+b^n_{ij}\nu^j_n=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nu^0_i\overset{\text{def}}{=}\mathcal{M}^0_i,\\ \nu^i_n=-\dfrac{1}{2}b^{ij}_n(b_j+t_j)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{M}^i_n;\end{cases}$$

$$\text{c)}\ \overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 11}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow\begin{cases}b_i-\nu^0_i+b^n_{ij}\nu^j_n=0,\\ t_i+\nu^0_i+b^n_{ij}\nu^j_n=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nu^0_i=\dfrac{1}{2}(b_i-t_i)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{M}^0_i,\\ \nu^i_n\overset{\text{def}}{=}\mathcal{M}^i_n.\end{cases}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 9. *На оснащенном в смысле Нордена – Картана L-подрасслоении $\mathcal{VH}$-распределения с полем симметрического тензора* $\Lambda^n_{ij}=b^n_{ij}$ $(\Lambda^n_{[ij]}=0)$ *любые две нормальные связности из тройки* $(\overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 5}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 11}{\nabla}{}^{\perp})$ *совпадают со связностью* $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}$ *и четверка нормальных связностей* $(\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 5}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 11}{\nabla}{}^{\perp})$ *вырождается в одну связность тогда и только тогда, когда L-подрасслоение нормализовано полями нормалей Михэйлеску* $(\mathcal{M}^i_n,\mathcal{M}^0_i)$ (28).

Аналогично (см. теорему 9) с использованием соотношений (12), (21), (22), (30), (34) доказываются следующие теоремы.

Теорема 10. *На оснащенном в смысле Нордена – Картана L-подрасслоении $\mathcal{VH}$-распределения с полем симметрического тензора* $\Lambda^n_{ab}=b^n_{ab}$ $(\Lambda^n_{[ab]}=0)$ *любые две нормальные связности из тройки* $(\overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 6}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta 12}{\nabla}{}^{\perp})$ *совпадают со* *связностью* $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}$ *и четверка нормальных связностей* $(\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 6}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 12}{\nabla}{}^{\perp})$ *вырождается в одну связность тогда и только тогда, когда L-подрасслоение нормализовано полями нормалей Михэйлеску* (m_n^i, m_i^0) (30).

Теорема 11. *На оснащенном в смысле Нордена – Картана L-подрасслоении* $\mathcal{VH}$ *-распределения с полем симметрического тензора* $\Lambda_{uv}^n = b_{uv}^n$ $(\Lambda_{[uv]}^n = 0)$ *любые две нормальные связности из тройки* $(\overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 7}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 13}{\nabla}{}^{\perp})$ *совпадают со связностью* $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}$ *и четверка нормальных связностей* $(\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 7}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\delta 13}{\nabla}{}^{\perp})$ *вырождается в одну связность тогда и только тогда, когда L-подрасслоение нормализовано полями нормалей Михэйлеску* $(\mathfrak{M}_n^i, \mathfrak{M}_i^0)$ (34).

7. Используя уравнения (2) убеждаемся, что функции

$$e_i = -\frac{1}{n-m-1}\Lambda_{i\alpha}^{\alpha},\ e_n^i = -\Lambda_n^{ij}(e_j + t_j), \tag{36}$$

$$\tilde{\lambda}_i = -\frac{1}{r}\Lambda_{ip}^{p},\ \tilde{\lambda}_n^i = -\Lambda_n^{ik}(\tilde{\lambda}_k + t_k) \tag{37}$$

являются квазитензорами 1-го порядка (36) и квазитензорами (37) 2-го порядка. Теперь нетрудно проверить, что соотношениям

$$\overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow t_i + \nu_i^0 + \Lambda_{ij}^n \nu_n^j = 0 \tag{38}$$

удовлетворяют:

a) в 1-й дифференциальной окрестности поля нормалей $\{e_n^i\}$, $\{e_i^0\}$;

b) во 2-й дифференциальной окрестности поля нормалей из пучков

$$\nu_n^i(\mu_1) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{M}_n^i + \mu_1(\mathcal{M}_n^i - \tilde{\lambda}_n^i),\ \nu_i^0(\mu_1) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{M}_i^0 + \mu_1(\mathcal{M}_i^0 - \tilde{\lambda}_i^0), \tag{39}$$

$$\nu_n^i(\mu_2) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\lambda}_n^i + \mu_2(\tilde{\lambda}_n^i - l_n^i),\ \nu_i^0(\mu_2) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\lambda}_i^0 + \mu_2(\tilde{\lambda}_i^0 - l_i^0), \tag{40}$$

$$\nu_n^i(\mu_3) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{M}_n^i + \mu_3(\mathcal{M}_n^i - l_n^i),\ \nu_i^0(\mu_3) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{M}_i^0 + \mu_3(\mathcal{M}_i^0 - l_i^0) \tag{41}$$

при каждом фиксированном параметре μ.

Теорема 12. *На оснащенном в смысле Нордена – Картана L-подрасслоении* $\mathcal{VH}$ *-распределения нормальные связности* $\overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp}$ *и* $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}$ *совпадают* (38), *если полями нормализующих объектов* $\{\nu_n^i\}$, $\{\nu_i^0\}$ *являются:*

1) в первой дифференциальной окрестности – поля нормалей (e_n^i, e_i^0);

2) во второй дифференциальной окрестности – поля нормалей любого из пучков (39) – (41) *при каждом фиксированном параметре* μ.

Так как тензор Λ_{ij}^n невырожден $(\det\|b_{ij}^n\| \neq 0)$, то из соотношений $b_{ij}^n T_n^j = 0$ следует, что тензор $T_n^i \equiv 0$.

Теорема 13. *На регулярном оснащенном в смысле Нордена – Картана L-подрасслоении* $\mathcal{VH}$ *-распределения с полем симметрического тензора* $(\Lambda_{[ij]}^n = 0)$ *нормальные связности* $\overset{\delta 18}{\nabla}{}^{\perp}$ *и* $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}$ *совпадают тогда и только тогда, когда L-подрасслоение коинцидентно* [6].

8. Пусть L-подрасслоение $\mathcal{VH}$-распределения оснащено в смысле Нордена — Бортолотти [3; 4]. Используя двойственную теорию оснащенных многообразий [4], нами построен двойственный образ данному $\mathcal{VH}$-распределению — $\overline{\mathcal{VH}}$-распределение проективного пространства P_n [1; 3; 7]. Для $\overline{\mathcal{VH}}$-распределения системам форм (15), (16) соответствуют двойственные им системы форм $\{\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{0}_{\tilde{A}}, \overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{\tilde{B}}_{\tilde{A}}\}$, имеющие аналогичные строения (формы и функции, входящие в выражения форм, записываются с чертой сверху). Системы форм $\{\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{0}_{\tilde{A}}, \overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{\tilde{B}}_{\tilde{A}}\}$ задают нормальные связности $\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\overline{\nabla}}}{}^{\perp}$ в расслоении нормалей 2-го рода, двойственные по отношению к связностям $\overset{\delta\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$ относительно инволютивного преобразования J [8]. Формы $\{\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{0}_{\tilde{A}}, \overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{\tilde{B}}_{\tilde{A}}\}$ имеют следующее строение:

$$\begin{gathered}
\overset{00}{\overline{\vartheta}}{}^{0}_{A}= \Lambda^{n}_{BA}[\nu^{0}_{j}\nu^{j}_{n}\omega^{B}_{0} + \Lambda^{B}_{n}\Lambda^{C}_{n}\omega^{n}_{C} + \Lambda^{B}_{n}(\eta^{0}_{n} + L^{0}_{C}\Lambda^{C}_{n})\omega^{n}_{0} + \omega^{B}_{n} + \nu^{j}_{n}\omega^{B}_{j},\\
\overset{00}{\overline{\vartheta}}{}^{0}_{n}= \omega^{0}_{n} - L^{0}_{A}\omega^{A}_{n} - \nu^{0}_{j}\omega^{j}_{n} + \nu^{j}_{n}[\nu^{0}_{jK}\omega^{K}_{0} - L^{0}_{B}\omega^{B}_{j} - \nu^{0}_{j}(\nu^{0}_{i}\omega^{i}_{0} + L^{0}_{C}\omega^{C}_{0})] +\\
+ \eta^{0}_{n}[\Lambda^{B}_{n}\omega^{n}_{B} + (\eta^{0}_{n} + L^{0}_{A}L^{A}_{n})\omega^{n}_{0}],\\
\overset{00}{\overline{\vartheta}}{}^{B}_{A}= \Lambda^{BC}_{n}[d\Lambda^{n}_{CA} + (\Lambda^{n}_{Cn} + L^{0}_{C})\Lambda^{D}_{n}\Lambda^{n}_{DA}\omega^{n}_{0} - \Lambda^{n}_{DA}(L^{0}_{C}\omega^{D}_{0} + \omega^{D}_{C})] +\\
+ \Lambda^{D}_{n}\Lambda^{n}_{DA}\omega^{B}_{0} + \delta^{B}_{A}[\Lambda^{C}_{n}\omega^{n}_{C} + \nu^{j}_{n}\omega^{n}_{j} + (\eta^{0}_{n} + L^{0}_{C}L^{C}_{n} + \nu^{0}_{i}\nu^{i}_{n})\omega^{n}_{0} + \omega^{n}_{n}],\\
\overset{00}{\overline{\vartheta}}{}^{n}_{A}= \Lambda^{n}_{BA}(L^{B}_{n}\omega^{n}_{0} - \omega^{B}_{0}),\\
\overset{00}{\overline{\vartheta}}{}^{B}_{n}= \Lambda^{BC}_{n}[L^{0}_{CK}\omega^{K}_{0} + L^{0}_{C}(\nu^{0}_{i}\omega^{i}_{0} + L^{0}_{A}\omega^{A}_{0}) + \eta^{0}_{n}(\Lambda^{n}_{Cn} + L^{0}_{C})\omega^{n}_{0} + \nu^{0}_{i}\omega^{i}_{C}] + \eta^{0}_{n}\omega^{B}_{0},\\
\overset{00}{\overline{\vartheta}}{}^{n}_{n}= \omega^{n}_{n} - \omega^{0}_{0} + \nu^{0}_{i}\omega^{i}_{0} + \nu^{i}_{n}\omega^{n}_{i} + L^{B}_{n}\omega^{n}_{B} + L^{0}_{B}\omega^{B}_{0} + (2\eta^{0}_{n} + L^{0}_{B}L^{B}_{n} + \nu^{0}_{i}\nu^{i}_{n})\omega^{n}_{0},
\end{gathered} \tag{42}$$

$$\begin{gathered}
\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{0}_{A}= \overset{00}{\overline{\vartheta}}{}^{0}_{A} + \overset{\delta}{\overline{\overline{\Pi}}}{}^{n}_{AC}\eta^{0}_{n}[\omega^{C}_{0} + \Lambda^{CB}_{n}(\Lambda^{n}_{Bn} + \mathrm{L}^{0}_{B})\omega^{n}_{0}],\\
\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{0}_{n}= \overset{00}{\overline{\vartheta}}{}^{0}_{n} + \overset{\varepsilon}{\overline{\overline{\Pi}}}{}^{n}_{nj}\eta^{0}_{n}[\omega^{j}_{0} + \Lambda^{ji}_{n}(\Lambda^{n}_{in} + \nu^{0}_{i})\omega^{n}_{0}],\ \eta^{0}_{n} = \overline{y}^{0}_{n},\\
\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{B}_{A}= \overset{00}{\overline{\vartheta}}{}^{B}_{A},\ \overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{B}_{n}= \overset{00}{\overline{\vartheta}}{}^{B}_{n},\\
\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{n}_{A}= \overset{00}{\overline{\vartheta}}{}^{n}_{A} + \overset{\delta}{\overline{\overline{\Pi}}}{}^{n}_{AC}[\omega^{C}_{0} + \Lambda^{CB}_{n}(\Lambda^{n}_{Bn} + L^{0}_{B})\omega^{n}_{0}],\\
\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{n}_{n}= \overset{00}{\overline{\vartheta}}{}^{n}_{n} + \overset{\varepsilon}{\overline{\overline{\Pi}}}{}^{n}_{nj}[\omega^{j}_{0} + \Lambda^{ji}_{n}(\Lambda^{n}_{in} + \nu^{0}_{i})\omega^{n}_{0}].
\end{gathered} \tag{43}$$

Каждая из систем форм $\{\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{0}_{\tilde{A}}, \overset{\delta\varepsilon}{\overline{\vartheta}}{}^{\tilde{B}}_{\tilde{A}}\}$ удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [5]. Таким образом, справедлива теорема, двойственная теореме 1.

Теорема 14. *На оснащенном в смысле Нордена — Бортолотти L-подрасслоении данного $\mathcal{VH}$-распределения в расслоении его нормалей 2-го рода индуцируются тридцать восемь нормальных связностей* $\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\overline{\nabla}}}{}^{\perp}$, *определяемых системами слоевых форм* (42), (43).

Список литературы

1. *Попов Ю. И.* Сильно взаимные трехсоставные распределения проективного пространства // Деп. в ВИНИТИ РАН 29.09.2003, № 1743-В2003.
2. *Попов Ю. И.* Сильно взаимные трехсоставные распределения проективного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2015. Вып. 10. С. 62—76.
3. *Попов Ю. И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. СПб., 1992.
4. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1992.
5. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Московского математического общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.
6. *Mihailescu T.* Geometrie differentiala projectiva. Bucaresti Acad. RPR, 1958.
7. *Попов Ю. И.* Двойственные нормальные связности базисного подрасслоения $\mathcal{SH}$-распределения проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 137—144.
8. *Попов Ю. И.* Инволютивное преобразование трехсоставного распределения проективного пространства // Естественные и математические науки в современном мире : сб. статей по материалам XXVII международной конференции. Новосибирск, 2015. № 2(26). С. 33—47.

Об авторах

Юрий Иванович Попов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

Светлана Юрьевна Волкова — преп., школа «Росток», Калининград.
E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

About the authors

Dr Juriy Popov, prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

Svetlana Volkova, teacher, «Rostock» school, Kaliningrad.
E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

УДК 550.388.2+519.63+533.9

К. Ю. Богомолов, С. А. Ишанов,
Н. М. Кащенко, С. В. Мациевский

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

Рассмотрена модель распределения концентраций, скоростей и температур ионов вдоль геомагнитной силовой трубки. В этой модели также учитываются основные процессы химической кинетики, амбиполярная диффузия, влияние горизонтального нейтрального ветра и нагрев плазмы сверхтепловыми электронами.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта.
Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. № 3. С. 17 – 26.